数理解析研究所講究録 1384 巻 2004 年 221-225

$L(1,\chi)$ の指標に関する 2 乗平均

名古屋大学・多元数理科学研究科　吉元 昌己 (Masami Yoshimoto)

Graduate School of Mathematics, Nagoya University

Katsurada-Matsumoto の論文 [2] で L 函数の指標に関する 2 乗平均の結果がある。本稿は、L-函数の代わりに Hurwitz ゼータ函数を用いた別証明を与えるものである。

1　既知の結果

Theorem A [1, 2]. $q \geq 3$, χ は mod q の Dirichlet 指標, χ_0 は mod q の自明な指標とする。このとき

$$\begin{aligned}&\sum_{\chi\neq\chi_0}|L(1,\chi)|^2\\&=\frac{\phi(q)}{q^2}J_2(q)\zeta(2)-\frac{\phi(q)^2}{q^2}\left(2\gamma_1-\gamma^2+2\zeta(s)\right)\\&\quad-\frac{\phi(q)}{q^2}J_1''(q)-\frac{\phi(q)^2}{q^2}\sum_{\substack{p|q\\p:\text{prime}}}\frac{p(\log p)^2}{(p-1)^2}-\frac{2\phi(q)}{q^2}R(q)\end{aligned}$$

が成り立つ。ここで

$$J_z(q):=q^z\prod_{\substack{p|q\\p:\text{prime}}}\left(1-\frac{1}{p^z}\right)=\sum_{d|q}\mu(d)\left(\frac{q}{d}\right)^z\quad(z\in\mathbb{C}),$$

$$J_z''(q)=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}J_z(q)$$

$\phi(q)=J_1(q)$: Euler 函数

[2] で $R(q)$ は次の漸近式で表されている：N は十分大,

$$R(q)=-\sum_{k|q}k\mu\left(\frac{q}{k}\right)\left\{\sum_{n=1}^{N-1}(-1)^n\zeta(1-n)\zeta(1+n)k^{-n}+O\left(k^{-N}\right)\right\}.$$

2 Theorem Aの別証明

Lemma 1 ([1]).

$$(J_1'(q))^2 = \phi(q)J_1''(q) + \phi(q)^2 \sum_{p|q} \frac{p(\log p)^2}{(p-1)^2}.$$

Lemma 2. $s \in \mathbb{C}$, $s \neq 1$とする。
(i) χ: mod q の Dirichlet 指標の場合

$$L(s,\chi) = \frac{1}{q^s} \sum_{\substack{1\le a\le q\\(a,q)=1}} \chi(a)\zeta\left(s,\frac{a}{q}\right),$$

(ii) $\chi = \chi_0$: 自明な指標の場合

$$L(s,\chi_0) = \frac{1}{q^s} \sum_{\substack{1\le a\le q\\(a,q)=1}} \zeta\left(s,\frac{a}{q}\right) = \frac{J_s(q)}{q^s}\zeta(s).$$

Lemma 3 (**Nielsen [3]**).

$$(\psi(x)+\gamma)^2 = \psi'(x) - \frac{\pi^2}{6} - 2\xi(x),$$

ここで、$\psi(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log\Gamma(x)$: digamma 函数,

$$\xi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} H_n \left(\frac{1}{x+n} - \frac{1}{n+1}\right), \quad H_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

Proof of Theorem A. 以下 $\sum_{\substack{1\le a\le q\\(a,q)=1}}$ を $\sum_a^*$ と表記する。$\mathrm{Re}\, s > 1$ の時、Lemma 2 より

$$\begin{aligned}
\sum_\chi |L(s,\chi)|^2 &= \frac{1}{q^{2\sigma}} \sum_{a_1,a_2=1}^{q} \sum_\chi \chi(a_1)\overline{\chi}(a_2)\zeta\left(s,\frac{a_1}{q}\right)\zeta\left(\overline{s},\frac{a_2}{q}\right)\\
&= \frac{\phi(q)}{q^{2\sigma}} \sum_a^* \left|\zeta\left(s,\frac{a}{q}\right)\right|^2\\
&= \frac{\phi(q)}{q^{2\sigma}} \sum_a^* \left|\zeta\left(s,\frac{a}{q}\right) - \zeta(s) + \zeta(s)\right|^2\\
&= \frac{\phi(q)}{q^{2\sigma}} \sum_a^* \left|\zeta\left(s,\frac{a}{q}\right) - \zeta(s)\right|^2\\
&\quad + 2\frac{\phi(q)}{q^{2\sigma}}\mathrm{Re}\,\zeta(\overline{s}) \sum_a^* \left(\zeta\left(s,\frac{a}{q}\right) - \zeta(s)\right) + \frac{\phi(q)^2}{q^{2\sigma}}\\
&= \frac{\phi(q)}{q^{2\sigma}} \sum_a^* \left|\zeta\left(s,\frac{a}{q}\right) - \zeta(s)\right|^2\\
&\quad + \frac{1}{q^{2\sigma}}|\zeta(s)|^2\left(2\mathrm{Re}\, J_s(q)\phi(q) - \phi(q)^2\right).
\end{aligned}$$

Lemma 2, (ii) より

$$\begin{aligned}\sum_{\chi\neq\chi_0}|L(s,\chi)|^2 &= \frac{\phi(q)}{q^{2\sigma}}\ \sum_a{}^{*}\left|\zeta\left(s,\frac{a}{q}\right)-\zeta(s)\right|^2 \\ &\quad+\frac{1}{q^{2\sigma}}|\zeta(s)|^2\left(2\mathrm{Re}\,J_s(q)\phi(q)-\phi(q)^2\right) \\ &\quad-\frac{1}{q^{2\sigma}}|\zeta(s)|^2|J_s(q)|^2 \\ &= \frac{\phi(q)}{q^{2\sigma}}\ \sum_a{}^{*}\left|\zeta\left(s,\frac{a}{q}\right)-\zeta(s)\right|^2 \\ &\quad-\frac{1}{q^{2\sigma}}|\zeta(s)|^2|J_s(q)-\phi(q)|^2.\end{aligned}$$

$s\to 1$ とする。Lemmas 1, 3 より

$$\begin{aligned}\sum_{\chi\neq\chi_0}|L(1,\chi)|^2 &= \frac{\phi(q)}{q^2}\ \sum_a{}^{*}\left(\psi\left(\frac{a}{q}\right)+\gamma\right)^2-\frac{1}{q^2}\left(J_1'(q)\right)^2 \\ &= \frac{\phi(q)}{q^2}\ \sum_a{}^{*}\psi'\left(\frac{a}{q}\right)-\frac{\pi^2}{6}\frac{\phi(q)^2}{q^2} \\ &\quad-2\frac{\phi(q)}{q^2}\ \sum_a{}^{*}\xi\left(\frac{a}{q}\right) \\ &\quad-\frac{\phi(q)}{q^2}J_1''(q)-\frac{\phi(q)^2}{q^2}\sum_{p|q}\frac{p(\log p)^2}{(p-1)^2}.\end{aligned}$$

$\psi'(x)=\zeta(2,x)$ が成り立つので

$$\sum_a{}^{*}\psi'\left(\frac{a}{q}\right)=J_2(q)\zeta(2).$$

よって、残りの項 $\sum^{*}{}_a\xi(a/q)$ が求まればTheorem A の式が得られたことになる。
Euler(-Maclaurin) の和公式を用いると、

$$\begin{aligned}\sum_a{}^{*}\xi\left(\frac{a}{q}\right) &= \sum_{d|q}\mu\left(\frac{q}{d}\right)\sum_{a=1}^{d}\xi\left(\frac{a}{d}\right) \\ &= \sum_{d|q}\mu\left(\frac{q}{d}\right)\left\{d\int_0^1\xi(u)\mathrm{d}u+\frac{1}{2}\left(\xi(1)-\xi(0)\right)+\int_0^1\overline{B}_1(du)\xi'(u)\mathrm{d}u\right\}.\end{aligned}$$

$\xi(x)$ の定義より

$$\int_0^1\xi(u)\mathrm{d}u=\gamma_1-\frac{1}{2}\gamma^2+\frac{1}{2}\zeta(2),$$

$$\xi(0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n(n+1)}=\zeta(2),\ \xi(1)=0,$$

$$\xi'(u)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{(u+n)^2}$$

が成立するので、

$$\sum_a{}^* \xi\left(\frac{a}{q}\right) = \phi(q)\left(\gamma_1 - \frac{1}{2}\gamma^2 + \frac{1}{2}\zeta(2)\right) + \sum_{d|q}\mu\left(\frac{q}{d}\right)\sum_{n=1}^{\infty} H_n \int_0^1 \frac{\overline{B}_1(du)}{(u+n)^2}\mathrm{d}u.$$

右辺の最後の項が Theorem A の $R(q)$ である。 □

Corollary. (i) $R(q)$ に対して q に無関係に

$$|R(q)| \le \frac{\zeta(2)\zeta(4)\sqrt{3}}{108} + 1 (< 2)$$

が成り立つ。

(ii) Euler-Maclaurin の和公式を使って更に計算することで

$$R(q) = -\mu(q)\left(\gamma_1 - \frac{1}{2}\gamma^2 + \frac{1}{2}\zeta(2)\right) + \sum_{1<d|q}\mu\left(\frac{q}{d}\right)\left\{\sum_{n=2}^{N+1}\zeta(1-n)\zeta(1+n)d^{1-n} + O(d^{-N})\right\}$$

が得られる。

Remark. q: 十分大

$$\sum_{p|q}\frac{p(\log p)^2}{(p-1)^2} \ll (\log\log q)^2.$$

Theorem A より次の定理が得られる：

Theorem B ([1]). Q: 十分大とする。このとき

$$\sum_{q\le Q}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi\ne\chi_0}|L(1,\chi)|^2 = \frac{\zeta(2)}{\zeta(3)}Q - c_3\log^3 Q - c_2\log^2 Q - c_1\log Q - c_0 + O\left(\frac{\log^2 Q}{Q}H(Q)\right)$$

が成り立つ。ここで

$$c_3 = \frac{1}{3\zeta(2)}, \quad c_2 = -\frac{\zeta'(2)}{\zeta^2(2)},$$

$$c_1 = \frac{1}{\zeta(2)}\left(2\gamma_1 - \gamma^2 + 2\zeta(2) + \sum_{p:\ \mathrm{prime}}\frac{p(\log p)^2}{(p-1)(p^2-1)}\right) + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\left.\frac{1}{\zeta(s)}\right|_{s=2},$$

$$
\begin{aligned}
c_0 = &\left(c_1 - \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\frac{1}{\zeta(s)}\bigg|_{s=2}\right)\left(\gamma - \frac{\zeta'}{\zeta}(2)\right) + \frac{1}{3}\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}s^3}\frac{1}{\zeta(s)}\bigg|_{s=2} \\
&- \frac{1}{\zeta(2)}\sum_{p:\ \mathrm{prime}} \frac{p^3(\log p)^3}{(p-1)(p^2-1)^2} + \frac{\gamma_2}{\zeta(2)} \\
&+ \zeta(2)\left(c_2^{(1)}(Q) + \frac{1}{2\zeta(2)}\right) + 2\sum_{q=1}^{\infty}\frac{R(q)}{q^2},
\end{aligned}
$$

$$
c_2^{(1)}(Q) := \sum_{n\le Q}\frac{\mu(n)}{n^2}\overline{B}_1\left(\frac{Q}{n}\right),
$$

$$
H(Q) := \sum_{n\le Q}\frac{\phi(n)}{n} - \frac{Q}{\zeta(2)} = O\left((\log Q)^{2/3}(\log\log Q)^{4/3}\right).
$$

参考文献

[1] S. Kanemitsu, Y. Tanigawa, M. Yoshimoto and W. Zhang, On the discrete mean square of Dirichlet L-functions at 1, *Math. Z.* (to appear).

[2] M. Katsurada and K. Matsumoto, The mean values of Dirichlet L-functions at integer points and class numbers of cyclotomic fields, *Nagoya Math. J.* **134** (1994), 151–172.

[3] Niels Nielsen, *Die Gammafunktion*, Chelsis, New York, 1965